

TUTORIAL TRANSFORMADA DE LAPLACE

Este operador matemático presenta una importante aplicación fundamentalmente a nivel de modelización de sistemas físicos, permitiendo en muchos de ellos la obtención su linealización para una más fácil resolución matemática. Estos sistemas físicos serán dependientes en su mayor parte del tiempo de operación siendo esta la variable a transformar.

DEFINICIÓN

ESPACIO DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL Ω

Este espacio, definido para la variable tiempo, satisface las siguientes condiciones:

1. Cualquier función F definida en ese espacio se define para cualquier valor real y es idénticamente nulo cuando el valor de t es negativo.
2. La función F es continua a trozos.
3. La función F puede tomar un valor no finito en 0.

Para esas funciones se habla de la Transformada de Laplace.

DEFINICIÓN DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sea esa función F definida para un espacio Ω , entonces la su transformada de Laplace $f=L(F)$ se define como:

$$L(F) = f(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} F(t) dt$$

Definida para todo aquel x real en el que la integral anterior **sea convergente**. La transformación inversa se representará por $F=L^{-1}(f)$.

PROPIEDADES

La función f anterior verifica las siguientes propiedades:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
2. Dos funciones F_1 y F_2 del espacio Ω que verifiquen:
 - a. $L(F_1)(x) = L(F_2)(x)$, entonces $F_1 = F_2$.
3. Para dos funciones F y G , y dos valores reales a y b se verifica que:
 - a. $L(aF + bG)(x) = aL(F)(x) + bL(G)(x)$
4. Para la función F y el número real a se cumple que:
 - a. $L(F(at)) = \frac{1}{a} L(F)\left(\frac{x}{a}\right)$

5. La función $F', F'', \dots$ derivadas primera, segunda, ... de la función F verifican que:
- $L(F')(x) = x * f(x)$
 - $L(F'')(x) = x^2 * f(x)$
 -
6. Del mismo modo para la función integral:
- $L(\int f(t)dt)(x) = f(x)/x$
 - $L(\int\int f(t)dt)(x) = f(x)/x^2$
 -

EJEMPLOS DE CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

EJEMPLO 1 FUNCIÓN CONSTANTE

Para la función $F(t) = 1$ se cumple que:

$$L(F)(x) = \frac{1}{x}$$

EJEMPLO 2 FUNCIÓN EXPONENCIAL

Para la función $F(t) = e^{at}$ se cumple que:

$$L(F)(x) = \frac{1}{x - a}$$

EJEMPLO 3 FUNCIÓN SENO

Para la función $F(t) = \sin t$

$$L(F)(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

EJEMPLO 4 FUNCIÓN COSENO

Para la función $F(t) = \cos t$

$$L(F)(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

APLICACIÓN A SISTEMAS REALES

SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Se trata de sistemas en los que se tiene una variable de entrada $U(t)$ y una variable de salida $Y(t)$ por la interacción con una serie de perturbaciones como:

1. Sistemas eléctricos donde:

- Variable de Entrada sea $v(t)$ (voltaje)
- Variable de Salida sea $i(t)$ (intensidad)
- Perturbaciones resistencia (R), bobina (L)

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

Por tanto, la relación tipo existente sería del tipo:

$$T * \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = k * U(t)$$

Para resolver estos sistemas se recomienda su linealización, siendo una de las maneras aplicar la transformada de Laplace. Así, aplicando la transformada a ambos lados de la ecuación se obtiene la siguiente ecuación en el dominio de la variable x :

$$\mathbf{L}(T * Y' + Y) = \mathbf{L}(k * U)$$

$$Tx * y(x) + y(x) = k * u(x)$$

$$(Tx + 1) * y(x) = k * u(x)$$

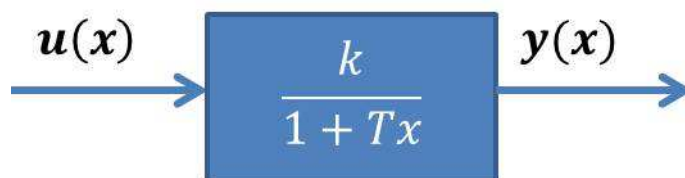
Con lo que la relación entre la entrada ($u(x)$) y la salida ($y(x)$) quedaría definida como:

$$\frac{y(x)}{u(x)} = \frac{k}{Tx + 1} = \frac{k/T}{x + 1/T}$$

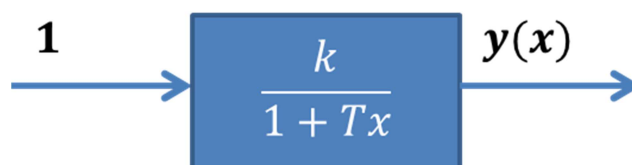
Ecuación con solución siempre que x no tome el valor $-1/T$.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL SISTEMA EN EL DOMINIO TRANSFORMADO

El anterior sistema se puede representar de la siguiente manera:



EXCITACIÓN CONSTANTE



La variable u tomará un valor constante, por ejemplo, 1 entonces:

$$\frac{y(x)}{1} = \frac{k/T}{x + 1/T}$$

Que aplicando antilaplacianas (véase apartado de propiedades) nos llevaría a:

$$Y(t) = \frac{K}{T} E^{-t/T}$$

expresión de la variable de salida en el dominio del tiempo.

Y así con otros ejemplos de la variable de entrada.

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Serían sistemas donde la relación entre la entrada y la salida tomaría la forma:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dy(t)}{dt} + \beta y(t) = \gamma u(t)$$

aplicándose para su resolución todas las propiedades y metodologías anteriormente citadas.

CONCLUSIONES

Las aplicaciones son variadas de esta herramienta pero desde el punto de vista del mantenimiento los 2 ejemplos anterior presentan una clara aplicación en el estudio de la relación entre excitación y respuesta en sistemas vibracionales pudiéndose estudiar a través de su uso el tipo de respuesta ante las diferentes excitaciones tipo como:

- Fuerzas de impacto.
- Fuerzas de carácter continuo.
- Excitaciones amortiguadas ,

Por eso te recomiendo que tras refrescarte tus conocimientos sobre esta transformada matemática, te lances a analizar los sistemas críticos de tu planta.....