TUTORIAL DERIVACIÓN Y DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES VECTORIALES

La operación derivada es por todos conocida desde el punto de vista de funciones escalares; no en vano la usamos habitualmente en muchas aplicaciones cotidianas en mantenimiento como al convertir la función desplazamiento en velocidad de vibración, o cuando en termografía calculamos gradientes en superficies, o cuando en ultrasonido se a analizan fenómenos de choque a nivel molecular.

Ahora bien, seguro que muchos de vosotros no recordáis la definición formal de esta operación matemática, siquiera a nivel escalar, como para plantearos su análisis a nivel vectorial. Por esa razón este tutorial matará esos 2 pájaros de un tiro, recordándoos su definición y explicándoos su uso como operador vectorial.

OPERADOR DERIVADA

Hablando de funciones escalares el operador derivada no es más que el cociente entre la variación de una variable por unidad de variación de otra variable de la cual depende. El concepto se define en el límite para que se pueda hablar de la derivada de un función en un punto.

DEFINICIÓN

Se llama cociente incremental a la primera definición comentada, es decir:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

llamado cociente incremental de la función f en a; en el límite se tendrá la derivada:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Las condiciones para la existencia del operador es que *f* esté definida en el entorno del punto a, y de manera recíproca si la función *f* es derivable en a, entonces el cociente incremental es continuo y definido en a. A veces también se habla de la siguiente definición:

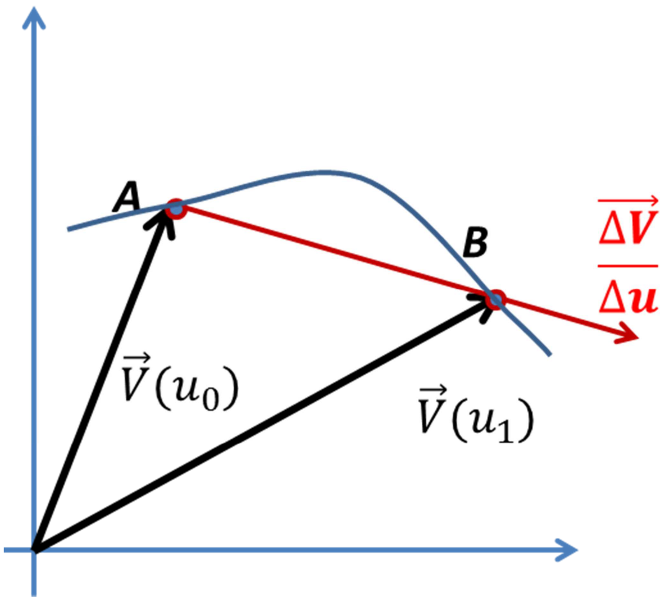
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

El concepto es similar, la función vectorial en cuestión tomará un valor en un punto u_0, y de igual modo otro en el punto u_1, representables por $\overrightarrow{V(u_1)}$ y $\overrightarrow{V(u_0)}$, por lo que antes se llamaba coeficiente incremental se definirá de igual manera:

$$\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta u} = \frac{\vec{V}(u_1) - \vec{V}(u_0)}{u_1 - u_0}$$

En el caso vectorial convendría hablar igualmente de su representación que sería otro vector de módulo el valor de la cuerda del arco de la indicatriz (gráfica que une todos los extremos de la función $\vec{V}$ tomada desde el origen) de los puntos A y B y de sentido las "*us*" crecientes:



En definitiva, si aproximamos u_1 a. u_0, en este caso por la derecha, se tendrá en el límite el concepto de función derivada en el punto u_0.

$$\overrightarrow{V'}(u_0) = \lim_{u_1 \to u_0} \frac{\vec{V}\,(u_1) - \vec{V}\,(u_0)}{u_1 - u_0} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta u}$$

Suponiendo que ese límite exista se puede hablar entonces de la derivada en ese punto; su representación gráfica como pasa en el campo escalar no es sino la tangente a la indicatriz en el punto A. En el caso de que la función definida como $\vec{V} = \vec{V}\,(u)$ tenga límite para todo el rango de variabilidades de u, o en un intervalo, se hablará entonces de una función vectorial derivada $\overrightarrow{V'}(u)$, mientras que lo que definíamos antes como $\overrightarrow{V'}\,(u_0)$ no es sino la derivada en el punto u_0 de la variable.

CONSIDERACIONES

1. Se puede hablar de derivada direccional por la derecha o por la izquierda según el sentido que nos acerquemos al punto en cuestión. Estos valores nos pueden aportar cierta información sobre la forma de la función, como en el caso que la función sea continua en u_0 y el producto vectorial de ambas derivadas direccionales sea distinto de cero (no serían colineales pues

$\vec{V}'(u_0^+)x\vec{V}'(u_0^-) <> \vec{0}$) tendremos un punto anguloso. Otro caso sería cuando el producto escalar es no nulo y el vectorial sí lo es, indicando que los vectores derivada tienen misma línea de acción si bien distinto sentido, hablándose entonces de un punto de retroceso.

2. Puede darse el caso que exista la derivada por la derecha y por la izquierda si bien la función no sea derivable en ese punto por la no existencia del límite.
3. La definición de la derivada como un límite permite escribir la fórmula de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{V'}(u_0) = \lim_{u \to u_0} \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta u} = \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta \mathrm{u}} + \vec{\varepsilon}$$

$$\overrightarrow{V'}(u_0)\Delta u = \overrightarrow{\Delta V} + \vec{\varepsilon}\Delta \mathrm{u}$$

$$\overrightarrow{V'}(u_0)du = \overrightarrow{\Delta V} + \vec{\varepsilon}\mathrm{du}$$

De este modo se obtendría $d\vec{V}$ que sería igual al producto de la derivada por la diferencial de la variable, es decir, $d\vec{V} = \overrightarrow{V'}(u_0)du$ de modo que:

Fórmula que da una representación muy intuitiva de lo que es la derivada puesto que $d\vec{V}$ tendrá la misma dirección que la derivada en ese punto, siendo el sentido dependiente de cómo sea du.

$$\overrightarrow{V'}(u_0) = \frac{d\vec{V}}{du}$$

REGLAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

Todas las reglas son consecuencia de la propia definición de derivada:

1. Si a la función vectorial $\vec{V}(u)$ se le suma un vector constante $\vec{c}$ entonces la derivada no varía.
2. Si una función vectorial $\vec{V}(u)$ se le multiplica por un escalar constante λ, la derivada resulta igualmente multiplicada por el escalar.
3. La derivada de una suma de n funciones vectoriales $\vec{V_\iota}(u)$ de una misma variable, es la suma de las derivadas de cada una de ellas.
4. La derivada del producto de una función escalar y otra vectorial de la misma variable es igual al producto de la derivada de la primera por la segunda, más la primera por la derivada de la segunda. En signos:

$$\vec{W}(u) = \phi(u)\vec{V}(u) \Rightarrow \overrightarrow{W'}(u) = \phi'(u)\vec{V}(u) + \phi(u)\overrightarrow{V'}(u)$$