TUTORIAL SERIES NUMÉRICAS

Las series numéricas están presentes en gran cantidad de aplicaciones de nuestro entorno industrial. Puede ser que no seamos conscientes de ello pero es así; pensad que se define serie como una sucesión de sumas de carácter infinito:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots ....$$

Obviamente la teoría sobre su tratamiento y posible convergencia resulta clave por cuanto parece difícil pensar en algún sentido físico a la suma anterior, que es de carácter infinito, concepto etéreo y alejado de la realidad.

Ahora bien, en la realidad de las cosas cuando tenemos que realizar tratar series de datos a nivel de estimaciones de costes, proyecciones temporales, como soluciones de sistemas diferenciales u otras estimaciones estadísticas resulta de notable utilidad toda la teoría planteada en este tutorial. ¡Vamos, por tanto, a por ello!

DEFINICIÓN

Ya hemos indicado anteriormente su concepto, ahora bien de manera formal se dice que se tiene una serie numérica cuando se tiene:

1. Un conjunto de funciones u_n definidas sobre un mismo conjunto de números reales.
2. Una suma infinita de esas funciones $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$

TIPOS

Las series de funciones más importantes son:

a) Series numéricas, las anteriormente indicadas

b) Series de potencias, del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

c) Series trigonométricas, del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ALCANCE

Al tratarse de un tutorial este documento se limitará al estudio de las primeras, las series numéricas con valores positivos (es raro encontrar en la realidad números negativos). Ya habrá tiempo para analizar las otras.

BASE CONCEPTUAL

i. SUCESIÓN DE SUMAS PARCIALES

Por lo dicho con anterioridad interesa hablar de la suma parcial de los elementos de la serie anterior definiéndolo como un valor de la siguiente manera:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

ii. CONVERGENCIA

Hablar de convergencia equivale a decir que existe un número real finito suma de esa serie numérica; con lo que ya sabemos la formulación recomendada sería:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n \ \left(= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$$

al número A se le define como valor suma de la serie

iii. CUIDADO CON ASOCIATIVIDAD O CONMUTATIVIDAD

Resulta inevitable cuando uno analiza series numéricas tender a asociar términos para buscar el valor suma pero ojo lo únicao que se puede decir es que si:

- $\lim_{n\to\infty} A_n = A \Longrightarrow\ A_{\phi(n)} \to\ A\ siendo\ \phi(n) una\ asociación\ de\ elementos\ en\ la\ serie\ original$
- $\lim_{n\to\infty} A_n = \pm\infty \Longrightarrow\ A_{\phi(n)} \to\ \pm\infty\ con\ \phi(n) una\ asociación\ de\ elementos\ en\ la\ serie\ original$

pero no cumpliéndose la asociatividad en el otro sentido, asociar para calcular la suma y generalizar a la suma infinita …..

1. TRUCO PARA VALORAR LA CONVERGENCIA

De manera recíproca a lo indicado en ii, se puede decir que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\ \Leftrightarrow considerar\ a_n\ como\ a_0 =\ A_0\ y\ a_n = A_n - A_{n-1}, para\ n \geq 1$$

es decir, redefinir los sumandos de las serie de potencias como una diferencia y sacar a_0 de la sumatoria pudiendo así establecer algún tipo de valoración adicional sobre la serie original.

CONVERGENCIA

CONDICIÓN NECESARIA

Una serie que converge siempre ha de cumplir que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ converge \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Se trata de una condición no suficiente como puede comprobarse analizando la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergente, pese a que sus términos converjan a 0.

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE

Se puede establecer esta condición mediante la condición de Cauchy para la sucesión de sumas parciales:

$$(\forall \varepsilon > 0) \ \exists \ \upsilon \in \boldsymbol{N} \ (naturales) tal \ que \ (\forall n > m > \upsilon \ |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots .. + a_n| < \varepsilon)$$

Es decir:

"Una serie converge si y solamente si dado un $\varepsilon > 0$ existe un índice υ tal que el valor absoluto de cualquier suma de términos consecutivos iniciada en $n < \upsilon$, es menor que ε"

PROPIEDADES

Para **series divergentes** se cumple de manera formal que:

1. $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) + (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$
2. $c(\sum_{n=0}^{\infty} a_n) = \sum_{n=0}^{\infty}(ca_n)$

generalizable para **series convergentes** de la siguiente manera:

1. $(\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k) = (\sum_{k=0}^{n} a_k) + (\sum_{k=0}^{n} b_k)$
2. $c(\sum_{k=0}^{n} a_k) = \sum_{k=0}^{n}(ca_k)$

PRÁCTICA CON LAS SERIES NUMÉRICAS DE TERMINOS POSITIVOS

En la práctica el criterio de Cauchy no resulta práctico al 100% por lo que podría seguir la siguiente metodología par la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Pasos para verificar la convergencia:

1. Si
    a. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ la serie diverge
    b. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ no se puede decir nada
2. Buscar funciones conocidas como cota superior para la serie, algo muy utilizado cuando se trata de funciones trigonométricas. Si la cota superior es convergente entonces converge (por Cauchy), en caso contrario diverge.
3. Para funciones productos de factoriales utilizar criterio de D'Alambert consistiría en construir la función:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = u_n \ y\ calcular\ l = \lim_{n\to\infty} u_n \begin{cases} l < 1\ converge \\ l > 1\ diverge \\ l\ = 1\ dudoso\ [si\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1\ divergente] \end{cases}$$

4. Para funciones con exponenciales puede ser útil el Método de la Raíz:

$$u_n = \sqrt[n]{a_n} = l \begin{cases} l < 1\ converge \\ l > 1\ diverge \\ l = 1\ dudoso\ [si\ \sqrt[n]{a_n} > 1\ divergente] \end{cases}$$

5. En el caso que D'Alambert falle, se aplicará el criterio de RAAF:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l \begin{cases} >\ 1\ converge \\ < 1\ diverge \\ = 1\ dudoso\ [si\ n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1\ diverge] \end{cases}$$

6. Para funciones con logaritmos y potencias puede ser conveniente usar el criterio del Logaritmo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln a_n} = l \begin{cases} < 1\ diverge \\ > 1\ converge \\ = 1\ dudoso\ [si\ \dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln a_n} < 1\ diverge, sino\ aplicar\ por\ 2^{a}\ vez\ el\ criterio] \end{cases}$$

EJEMPLO

Evaluar la convergencia de la serie:

$$a_n = \frac{1}{n^2}, es\ decir, ¿\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ converge?$$

Al tratarse de funciones factoriales se aplicaría D'Alambert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \ (antes\ del\ límite\ es < 1\ luego\ falla)$$

Se aplicará entonces RAAF:

$$\lim_{n\to\infty} n[\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} - 1] = \lim_{n\to\infty} n[\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1] = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2} = 2 > \ 1\ \boldsymbol{convergente}$$

luego la serie convergería, que es lo que se precisa conocer.

Bueno, pues hasta aquí el tutorial de hoy. Espero que te resulte de utilidad para tu futuro profesional. Ya sabes, ¡Hasta el próximo tutorial, dentro de quince días!.