TUTORIAL MATRICES

La notación matricial es un aspecto de la matemática que se utiliza mucho en nuestra gestión diaria en mantenimiento y producción. No en vano multitud de algoritmos relacionados con la ingeniería de organización hacen uso de ella como Método del Simplex en Programación Lineal, Electre en Teoría de la Decisión o los Modelos Markovianos para la Planificación del Mantenimiento.

Por ello se le va dedicar este tutorial introductorio que os permitirá refrescar los más básicos conceptos sobre esta herramienta del algebra matemática.

¿QUÉ ES UNA MATRIZ?

Pese a que la representación matemática de la matriz seguro que es por todos conocida su definición fomal puede resultar un tanto sorprendente. Así se habla de matriz como una aplicación que establece una correspondencia entre un espacio cartesiano de dos dimensiones y los números reales.

De hecho si hablamos de una matriz mxn la correspondencia consistiría en asignar a cada pareja de índices *(i, j)* con *i = 1, 2, 3…m* y *j = 1, 2, 3, …. n* un único número real.

$$Matriz\ A:\ \{1, \ldots., m\}\ X\ \{1, \ldots., n\} \longrightarrow R$$

Obviamente con esta definición el conjunto de matrices genera un espacio propio denotado por $R^{m\,x\,n}$ de tal modo que cualquier matriz A de esas dimensiones verificaría que $A \in R^{m\,x\,n}$. A cada elemento de esa matriz, número real, se le representa por a_{ij}, elemento que ocuparía la posición fila *i* (hileras horizontales) y columna *j* (hileras verticales) en la matriz A.

OPERACIONES BÁSICAS

Las operaciones que podemos realizar con este elemento serían:

SUMA

Para que dos matrices puedan sumarse deben permanecer al mismo espacio algebraico, en este caso aquel de dimensiones *m x n*. De ese modo las matrices se sumarían elemento a elemento obteniéndose una matriz de similar dimensión.

$$C = A + B\ con\ A, B, C\ \in\ R^{mxn} \Leftrightarrow \left[c_{IJ}\right] = \left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right] \forall\ i, j\ con\ i = 1, 2, \ldots., m\ y\ j = 1,2, \ldots n$$

Un caso particular de la suma sería la combinación lineal que verificaría la siguiente propiedad:

$$\alpha(A + B + C \ldots.(suma\, finina) = \alpha A + \alpha B + \alpha C + \cdots ..$$

OPERACIONES COMPLEJAS

Mayor complejidad presentan sin lugar a dudas las siguientes operaciones:

TRANSFORMACIONES LINEALES

El concepto de transformación lineal en la notación numérica convencional (espacio de números reales) se expresa de la siguiente forma:

$$y = ax$$

es decir, se trata de una operación que traslada los valores *x* en unos *y* en base a un valor de transformación.

En el caso matricial una matriz A de dimensiones *m x n* permite transformar un vector de valores de dimensiones *n x 1* en un vector de valores de dimensiones *m x 1* (es decir, convertir n filas de valores en m).

$$\vec{y} = A\,\tilde{x}\ ;\ \vec{y}\ \in\ R^{m\,x\,1}, A\ \in\ R^{m\,x\,n}, \tilde{x}\ \in\ R^{n\,x\,1}$$

La propia naturaleza de la transformación lineal permite afirmar lo siguiente:

1. $A(\alpha\tilde{x}) = \alpha A(\tilde{x})\ , \alpha \epsilon R$
2. $A\ (\tilde{x} + \tilde{y}) = \mathrm{A}\tilde{x} + A\tilde{y}\ , \tilde{y}\ \in\ R^{m\,x\,1}$

PRODUCTO

Muy en relación con lo anterior se podría plantear la definición de producto, puesto que si la matriz *A* de dimenseiones *m x n* convertía un vector *x de dimensión m* en otro *y de dimensión n* mediante la transformación *y = Ax*,

¿Cómo convertiríamos el vector y de dimensión n a un vector z de dimensión p?

Pues realizando la transformación *z = By* donde *B* sería una matriz de dimensiones *n x p*. De modo que tendríamos:

- $\vec{y} = A\tilde{x}\ ; \vec{y}\ \in\ R^{m\,x\,1},\ A\ \in\ R^{m\,x\,n},\ \tilde{x}\ \in\ R^{n\,x\,1}$
- $\check{z} = B\,\vec{y}\ ; \vec{y}\ \in\ R^{m\,x\,1},\ B\ \in\ R^{n\,x\,p},\ \check{z}\ \in\ R^{p\,x\,1}$

que combinadas:

$$\check{z} = A\,B\,\tilde{x}$$

Permitirían la transformación del espacio de dimensión *m* al de dimensión *p* es la matriz producto de A * B y verifica que:

$$Si\ A\ \in\ R^{m\,x\,n}\,y\,B\ \in\ R^{n\,x\,p} \Longrightarrow\ C = A * B\ \in\ R^{m\,x\,p}$$

Sin más que seguir todo el hilo argumental planteado hasta el momento. La naturaleza de cada elemento de la matriz *C* llamado $c_{ik}\ , con\ i = 1, \dots, m\ k = 1, \dots, p$ no se va demostrar en estos momentos por su extensión pero presentaría el siguiente valor:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

"Cada elemento c_{ik} se obtendría como la suma de los productos de cada elemento de la *i-ésima* fila de la matriz *A* por cada elemento de la *j-ésima* columa de la matriz *B*."

Para entender lo anterior de mejor manera hemos de pensar que cada elemento de la matriz producto equivaldría al producto de un vector de dimensión *1 x m* por otro vector de dimensión *m x p*:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots\dots & a_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ . \\ . \\ . \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$$

Características del Producto de Matrices:

- **No conmutativo**. Según la fórmula anterior el producto *B * A* carecería de sentido pues las columnas de *B (p)* no coinciden con las filas de *A(n)*.

  La pregunta podría plantearse en el caso de trabajar con matrices cuadradas (número de filas igual a columnas) para lo que bastaría con poner un ejemplo para verificar la no igualdad.

- **Asociativo.** Sin embargo el producto sí es asociativo siempre que las matrices presenten las dimensiones adecuadas.

  $$(AB)F = A(BF)$$

  La demostración excede al alcance de este tutorial.

- **Distributiva.** El producto es distributivo respecto a la suma tanto por la derecha por la izquierda:

$$(A + B + \cdots.)F = AF + BF + \cdots.$$

$$F(A + B + \cdots.) = FA + FB + \cdots.$$

- **Matriz Unidad.** Es aquella matriz cuadrada (similares filas y columas) de dimensión *n x n* que tiene por elementos a δ_{ij} denotados como **Símbolos de Kronecker** de valores:

$$I(n) = \lfloor \delta_{ij} \rfloor \; con \; \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases} \; \forall \; i, j = 1,2, \ldots., n$$

  y verifica que para una matriz *A m x n* que:

$$I(m)A = A = A\,I(n)$$

  es decir se obtiene la misma matriz *A* si se multiplica por la izquierda por la matriz identidad de orden m o por la derecha por la matriz identidad de orden n.

GLOSARIO DE TÉRMINOS

1. **Matriz Cuadrada**. Aquella en la que existen el mismo número de filas y columnas.
2. **Matriz Rectangular.** Aquella en la que no coinciden ambos.
3. **Matrices triangulares superiores.** Cuando el número de filas supera al de columnas.
4. **Matrices triangulares inferiores.** Cuando el índice de columnas supera al de filas.
5. **Matriz Transpuesta.** Es aquella que resulta de intercambiar filas por columnas.
6. **Matriz inversa por la Izquierda.** Es aquella que al multiplicarla por la izquierda por A da lugar al identidad.
7. **Matriz inversa por la Derecha.** Es aquella que al multiplicarla por la Derecha por A da lugar al identidad.

No todas las matrices admiten inversa por la derecha o izquierda existiendo métodos que permiten analizar su posible existencia.

Hasta aquí el tutorial de esta semana, quizás más ligerito que en anteriores ocasiones máxime si tenemos en cuenta que las matrices son algo que se suele utilizar en sistemas productivos. Ahora bien creo que este documento aporta un punto de vista teórico de que fortalecerá cualquier conocimiento previo que tuvierais sobre la materia.