TUTORIAL REGLA DE LA CADENA

El cálculo es una disciplina que se aleja de la actividad de mantenimiento, si bien es una base necesaria para cualquier labor de gestión y/o ingeniería.

La derivación es una de las más conocidas operaciones de esta rama dedicándose este introductorio tutorial a su concepto, aplicabilidad y propiedades fundamentales.

CONCEPTO

La noción de derivada se basa en el concepto de límite de una función. Pensemos por ejemplo en la obtención de la velocidad instantánea de un elemento en movimiento rectilíneo.

Para una función definida en el entorno de un punto a se tiene:

1. Cociente incremental de la función f en a:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2. f es una función derivable en a, si el cociente incremental de f en a tiene límite finito en a:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

OBSERVACIONES

1. El cociente incremental está definido en un entorno reducido de a.
2. Si f es derivable en a, entonces ese cociente incremental es continuo y definido en a.
3. Definición alternativa de la derivada de f en a.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

EJEMPLOS

1. Función lineal $f(x) = mx + n$
   a. Cociente incremental de f en a:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{(mx + n) - (ma + n)}{x - a} = m$$

   b. Derivada $f'(a) = m \; \forall a \in \mathbb{R}$
   c. Función constante m=0 tiene derivada nula.
2. Función seno $f(x) = \sin x$
   a. Cociente incremental de f en a (usando la definición alternativa):

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \frac{\sin a\cos h+\cos a\sin h-\sin a}{h} = \frac{\boldsymbol{\sin a(\cos h-1)}}{\boldsymbol{h}} + \frac{\boldsymbol{\cos a\sin h}}{\boldsymbol{h}}$$

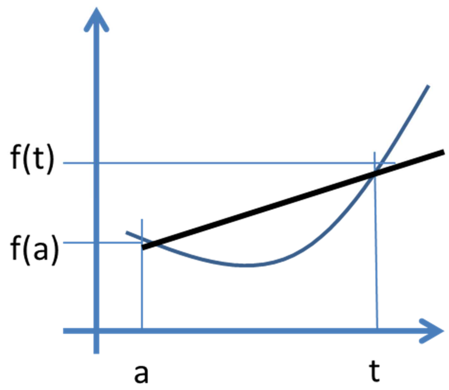
b. Derivada

- $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1\ (\sin h \approx h)$
- $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cos^2 h-1}{h\ (\cos h+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-sin^2 h}{h\ (\cos h+1)} = \lim_{h\to 0} -\frac{sinh}{h}{}_{h\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{cosh+1} = 0$
- $f'(a) = \cos a$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

El concepto de derivada responde a la necesidad de determinar la dirección de la recta tangente a una curva en cada uno de sus puntos:

Supongamos una función f real de variable real que es continua y derivable en un punto $a \in I$, entonces la función posee recta tangente en el punto (a, f(a)) siendo su pendiente la derivada de f en a:



La ecuación de la recta secante y = f(x) es:

$$\frac{x-a}{t-a} = \frac{y-f(a)}{f(t)-f(a)}$$

$$y = f(a) + \frac{f(t)-f(a)}{t-a}(x-a)$$

Es decir, el cociente incremental es la pendiente de la recta.

Si se hiciera tender t hacia a se tendría la recta tangente, siendo en ese caso su pendiente la derivada de f en a ($f'(a)$):

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

NOTACIÓN DE LEIBNIZ

Si se tiene una relación de dependencia y = f(x) se debe cumplir que:

$$\Delta y \cong f'(x)\Delta x$$

Para el caso de incrementos infinitamente pequeños la anterior aproximación se tornará igualdad cumpliéndose:

$$dy = f'(x)dx$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

notación de Leibniz para las derivadas de funciones.

DERIVADAS LATERALES

1. Derivada lateral izquierda de la función f en a:

$$f'_{-}(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2. Derivada lateral derecha de la función f en a:

$$f'_{+}(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que además deben ser iguales para que la función sea derivable en a.

DERIVADAS SUCESIVAS

La derivada n-ésima o derivada de orden n de una función f derivables en la derivada de la función de orden n-1 en el entorno del punto a.

REGLAS DE DERIVACIÓN

SUMA

- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

PRODUCTO

- $(f * g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

COROLARIO

- $(cf)'(x) = c\, f'(x)$
- $(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots . + c_n f_n(x))' = c_1 f_1'(x) + \cdots . + c_n f_n'(x)$
- $(f^N)' = N\, f'(x) f^{N-1}(x)$

COCIENTE

- $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$

- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

REGLA DE LA CADENA

- $y = f(x), z = g(y)$
- $x \rightarrow \mathrm{f} \rightarrow y \rightarrow \mathrm{g} \rightarrow z$
- $h'(x) = g'\big(f(x)\big) * f'(x)$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

- Composición de Funciones $(g\ o\ f)(a)$
  - $(g\ o\ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) * f'(a)$

EJEMPLO

- $g(x) = \sqrt{x} \rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = 5x^2 + 3x + 1 \rightarrow f'(x) = 10x + 3$
- $h(x) = \sqrt{5x^2 + 3x + 1}$, $h(x) = (g\ o\ f)(x)$
  - $h'(x) = g'\big(f(x)\big) * f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5x^2+3x+1}} * (10x + 3)$