TUTORIAL VARIABLE COMPLEJA

Quizás los seguidores más acérrimos del blog recordéis que el primero de los boletines ya habló sobre número complejos dando las trazas más básicas sobre su particular nomenclatura, y el detalle de sus principales propiedades.

Esa puede ser una primera base matemática, fundamental en ingeniería, pero se puede profundizar más sobre ella orientándolo más hacia el campo de las aplicaciones y su personalización, fundamentalmente en el área de investigación y desarrollo.

BAGAJE CONCEPTUAL

Resulta difícil dar en formato flash una lista de conceptos para una trama tan profunda como la variable compleja, si bien se destacarían estos:

- $Z = x + iy$
- $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\overline{Z} = x - iy$
- $Z + \overline{Z} = 2\,Re\,(Z)$
- $Z - \overline{Z} = 2\,i\,Im(Z)$
- $Z * \overline{Z} = |Z|^2$
- $|Z_1 Z_2| = |Z_1||Z_2|$
- $\overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1}\,\overline{Z_2}$
- $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$
- $|Z_1 - Z_2| \geq \big||Z_1| - |Z_2|\big|$
- $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\ \sin\vartheta$ (formula de Euler)
  - Ejemplo $Demostrar\ cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\,cosx}{4}$
  - $cos^3 x = (\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix}\right) = \frac{1}{4}(cos3x + 3cosx) c.q.d.$
- $Z = \cos\vartheta + i\ \sin\vartheta \rightarrow |Z| = 1, \vartheta = argz$
- $Z = r\,e^{i\vartheta} \rightarrow |Z| = r,\ argz = \vartheta$
- $Z = r\,e^{i\vartheta} \rightarrow W^n = Z \rightarrow W = r^{1/n}\,e^{i(\vartheta + 2k\pi/n)}$, *k=0,1,…., n-1*

- Ejemplo $\sqrt[4]{-1} \rightarrow W^4 = -1 \rightarrow W_k = (-1)^4 * e^{i\,(\pi+4k\pi/4)} \rightarrow = \begin{cases} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & k = 0 \\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & k = 1 \\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & k = 2 \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} & k = 3 \end{cases}$

- $(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = (e^{i\vartheta})^n = e^{in\vartheta} = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta$ (Fórmula de De Moivre)
- $\cos(ix) = Chx$
- $\sin(ix) = iShx$

CAMPO COMPLEJO

Este campo de estudio, cuerpo de los números complejos, tiene las siguientes particularidades:

1. No existe relación de orden total en el cuerpo de los números complejos. Ello implica que no se puede decir por ejemplo:
   a. $Z_1 \geq Z_2$ o que $Z \geq 0$, debiéndose establecer un orden a nivel de módulos $|Z| \geq 0$ o $|Z| \geq |W|$
2. Un entorno $\mathbb{Z}$ en el plano de números complejos z $\in \mathbb{C}$ será un conjunto:
   a. $\{w \in \mathbb{C}\ tal\ que\ |w - z| < \varepsilon \text{ con } \varepsilon > 0$
3. Se dice que z_0 es un punto de acumulación del conjunto $S \in \mathbb{C}$ si todo entorno de z_0 contiene algún punto de S distinto del propio z_0.
   a. Estos puntos de acumulación se dividen a su vez en interiores y frontera.
4. Arco continuo es todo par (I,z) con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo y $z: I \rightarrow \mathbb{C}$ aplicación compleja.
5. El punto f(0) de la siguiente función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) = \frac{1}{z}$ es un punto infinito del plano complejo.

FUNCIONES EN EL CAMPO COMPLEJO

Tipos:

1. El fundamental, que serán aquellas funciones $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ complejas de una variable compleja.
2. Funciones complejas de variables reales $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Ejemplo: arco continuo.
3. Funciones reales de variable compleja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Ejemplo: función argumento (Arg Z) o modulo ($|Z|$)

Como en el campo real cada elemento del dominio debe tener un solo elemento imagen, por ello:

- No es función $f(z) = \sqrt{z}$ o $f(z) = z^{1/n}$ (función multiforme) , sí es función $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$ (función uniforme)

CONTINUIDAD

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función uniforme; entonces esta es continua en $z_0 \in D$ si $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\ tal\ que\ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

- f y g continuas
  - f+g, f*g continuas
  - Si g(z)$\neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}\ es\ continua,$

DERIVABIILIDAD

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función uniforme; entonces esta es DERIVABLE en $z_0 \in D$ si $EXISTE\ Y\ ES\ ÚNICO\ EL\ LÍMITE$:

$$\lim_{Z \to Z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Cociente que es la derivada de f en z_0, representada por $f'(z_0)$

- f y g derivables
  - f+g, f*g derivables
  - Si g(z_0)$\neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}\ derivable$
  - $f: D \rightarrow \Omega, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, entonces $g\ o\ f\ es\ derivable\ en\ D$, y se cumple que

$$(gof)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

- $f: D \rightarrow \mathbb{C}$:
  - Función uniforme. Se dice que f es holomorfa en D si es derivable en todo punto de D.
  - Función con valores complejos definida y derivable en D, excepto en un conjunto de puntos $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ de D; a ese conjunto de puntos se le conoce como ptos singulares de f.
- f holomorfa
  - $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ que asigna a cada $z \subset D$ una función $f(z) = u(x,y) + i * v(x,y)$
- $f\ (= u + iv)\ derivable\ en\ z_0 = x_0 + iy_0$, entonces u y v tienen en (x_0, y_0) derivadas parciales de primer orden que satisfacen ecuaciones de cauchy-rienmann
  - $u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0)$
  - $u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0)$
  - $cumpliéndose\ que\ f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i * \frac{\partial f}{\partial y}$
  - Ejemplos:
    - $f(z) = x + 3iy$
      - $u(x,y) = x, v(x,y) = 3y$
        - $u'_x = 1, v'_y = 3$
        - $u'_x \neq v'_y$

- f no es derivable al no cumplirse condiciones de C-R.

- $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - $u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v(x,y) = 0$
    - $u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $v'_y = 0$. Distintos salvo x=0, $y \neq 0$
    - $u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $v'_x = 0$. Distintos salvo y=0, $x \neq 0$
    - f no es derivable en ningún punto $z \neq 0$ (no C-R).

Hasta aquí el tutorial de esta entrega del boletín. Espero te resulte de utilidad.