TUTORIAL SERIES DE FOURIER

Ya se han presentado Tutoriales sobre el espectro (transformada de Fourier) y la convergencia de series, pero de manera independiente al menos argumentalmente.

En este tutorial pretendo introducir la convergencia de las series de Fourier, teoría de importante aplicación para valorar la viabilidad matemática de cada uno de los elementos que aparecen en un espectro de frecuencias.

Dada la amplitud de la materia en este tutorial solo se expondrán los conceptos relativos a la definición de Serie de Fourier, entrándose con posterioridad en otros relativos a su convergencia y viabilidad matemática.

DEFINICIÓN

Una serie de Fourier es una sucesión de Senos y Cosenos como ya se dijo en el tutorial sobre el espectro de vibración.

Matemáticamente si tenemos una aplicación:

$$f: [-\pi, \pi] \to R$$

entonces la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Si converge a f *será la serie de Fourier de la función* f.

BAGAJE CONCEPTUAL

- Funciones Continuas a Trozos en un intervalo es aquella que presenta en ese intervalo un número finito de discontinuidades de Primera Especie.
- Una función periódica de período T tiene también por período ZT siendo Z un número entero.
- Período fundamental es el menor de los valores períodos de una función.
- Función par en un intervalo es aquella que no cambia de valor invirtiendo el signo de la variable.
- Función impar en un intervalo es aquella que invierte su signo al cambiar el signo de la variable.
- Producto Escalar de 2 funciones $< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se trata de funciones que se analizarán en el intervalo $[-\pi, \pi]$, representándose como la unión de las 3 funciones:

$$\{1\}\ U\ \{\cos nx\}\ U\ \{\sin nx\}\ con\ n \in N$$

CARACTERÍSTICAS

- Tienen por período fundamental 2π
- $\{1\}\ U\ \{\cos nx\}$ es una función par en $[-\pi, \pi]$.
- $\{\sin nx\}$ es una función impar en $[-\pi, \pi]$
- Son funciones ortonormales 2 a 2 puesto que sus productos escalares son 0:
    - $< 1, \cos nx > = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\ dx\ = 0\ \forall\ n\ \in N$
    - $< 1, \sin\ nx > = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\ dx\ = 0\ \forall\ n\ \in N$
    - $< \cos nx\, , \sin mx > = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\ dx = 0\ \forall\ n \neq m\ n, m\ \in N$
    - $< \cos nx\, , \cos mx > = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\ dx = 0\ \forall\ n \neq m\ n, m\ \in N$
    - $< \sin nx\, , \sin mx > = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\ dx = 0\ \forall\ n \neq m\ n, m\ \in N$

SERIE DE FOURIER

La serie definida con anterioridad:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

es la serie de Fourier de la función f, y basándose en las propiedades de ortonormalidad anteriores con los siguientes coeficientes:

- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\ dx\ \forall\ n\ \in N$
- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\ dx\ \forall\ n\ \in N$

CASOS PARTICULARES

- Si $\underline{f\colon [-\pi, \pi]\ \rightarrow R}$ <u>es par</u> su serie de Fourier es:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\ dx$$

- Si $\underline{f: [-\pi, \pi] \ \rightarrow R}$ es impar su serie de Fourier es:

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nx \, dx$$

$$b = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

EJEMPLOS

Valor Absoluto de x

Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de la función $f(x) = |x|$ con $x \in [-\pi, \pi]$

- $a_n = \begin{cases} 0 \; para \; n \; par \\ \frac{-4}{n^2\pi} \; para \; n \; impar \end{cases}$
- $a_0 = \pi$
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx \;\, dx \; \forall \, n \; \in N$

Por lo que la función $|x|$ puede aproximarse por:

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi} \cos(2n-1)x$$

Coseno al Cubo de x

Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de la función $f(x) = cos^3 x$ con $x \in [-\pi, \pi]$

- $a_n = \begin{cases} 0 \; para \; n \; \neq 1 \; y \; n \; \neq 3 \\ \frac{3}{4} \; para \; n = 1 \\ \frac{1}{4} \; para \; n = 3 \end{cases} \qquad b_n \; = 0 \; \forall \, n \; \in N$

EXTENSIONES PARA FUNCIONES DEFINIDAS EN OTROS INTERVALOS

Las definiciones dadas hasta ahorase limitan al intervalo $[-\pi, \pi]$. Dada la utilidad de esta serie de funciones se detallan las extensiones para funciones definidas en otros intervalos:

EXTENSIÓN PAR DE FUNCIONES DEFINIDAS EN $[0, \pi]$

Dada la función $f: [0, \pi] \ \rightarrow R$ se denomina $\underline{extensión \; par \; de \; f \; a \; [-\pi, \pi]}$ con período 2π a:

$$f_p\,(x) = \begin{cases} f(-x) - \pi \leq x \leq 0 \\ f(x) \; 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$f_p\,(x) = \; f_p(x + 2\pi)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

EXTENSIÓN IMPAR DE FUNCIONES DEFINIDAS EN $[0,\pi]$

Dada la función $f\colon [0,\pi] \to R$ se denomina *extensión impar de f a $[-\pi,\pi]$* con período 2π a:

$$f_i\,(x) = \begin{cases} -f(-x) - \pi \le x < 0 \\ f(x)\; 0 < x \le \pi \end{cases}$$

$$\frac{f_i(0^-) + f_i(0^-)}{2} = 0\; en\; x = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

GENERALIZACIÓN A $[a,b] \subset R$

Si la variable t recorre el intervalo $[a,b]$ entonces la variable x definida por:

$$x = \frac{2\pi}{b-a}t + \frac{a+b}{a-b}\pi$$

recorrerá el intervalo $\left[-\pi,\pi\right]$, definiéndose así las funciones trigonométricas:

$$\{1\}\; U \left\{\cos\frac{n\pi}{b-a}(2t-(a+b))\right\}\; U \left\{\sin(\frac{n\pi}{b-a}(2t-(a+b))\right\}$$

- Las funciones anteriores serán ortonormales en el intervalo $[a,b]$
- La serie de Fourier quedará definida para la función $f\colon [a,b] \to R$ de la siguiente manera:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{b-a}[2t-(a+b)] + b_n \sin\frac{n\pi}{b-a}[2t-(a+b)]$$

- El concepto de paridad se complica pues 0 ya no es el punto medio (ahora es $\frac{a+b}{2}$):
  - $f\; par\; en\; [a,b]\; si\; f(t) = f(a+b-t)$
  - $f\; impar\; en\; [a,b] si\; f(t) = -f(a+b-t)$
- De igual manera que se hablaba sobre extensiones para el intervalo $[-\pi,\pi]$ se puede hablar para [a,b]
  - Extensión par al intervalo [2a-b, b] sería una función que tuviese por argumento y series y coeficientes de Fourier los siguientes:

$$\frac{n\pi}{b-a}\;[t-a]$$

$$f_p(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos[\frac{n\pi}{b-a}(t-a)]dt$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f_p(t)\cos[\frac{n\pi}{b-a}(t-a)]dt$$

- Extensión impar al intervalo [2a-b, b] sería una función que tuviese por argumento y series y coeficientes de Fourier los siguientes:

$$\frac{n\pi}{b-a}\ [t-a]$$

$$f_i(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{b-a}(t-a)dt$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f_p(t)\sin[\frac{n\pi}{b-a}(t-a)]dt$$

EJEMPLOS

Función $f(t) = t$ con $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

- Se obtiene el argumento $\frac{n\pi}{b-a}[2t-(a+b)] = [4nt-3n\pi]$ para pasar al dominio [-π, π]
- Familia de funciones trigonométricas

$$\{1\}\ U\ \{\cos(4nt-3n\pi)\}\ U\ \{\sin(4nt-3n\pi)\}$$

- Teniendo en cuenta las fórmulas de coseno y seno de una suma

$$t \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(4nt) + \ b_n\sin(4nt)$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\cos 4nt\ dt$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\sin 4nt\ dt$$