TUTORIAL INTEGRAL DE RIEMANN

La integral es un concepto de uso habitual en ingeniería, y siempre se ha asociado al concepto del área delimitado por una función.

Ahora bien, una buena base de ingeniería requiere no sólo conocer su formulación y aplicación práctica, sino también toda la teoría previa a su creación.

CONCEPTOS

PARTICIÓN

Una partición P de un intervalo es la división del intervalo en un número finito de subintervalos, estando cada uno de estos delimitado por sus puntos extremos. Así para un intervalo [a,b] se tendría la siguiente partición:

$$P = \{[a, x_1], [a, x_2], \dots\dots, [x_{n-1}, b]\} = \{a, x_1, x_2, \dots\dots, x_{n-1}, b\}$$

SUMAS DE DARBOUX

Sea f una función acotada en el intervalo *[a,b]*, y P una partición en subintervalos del intervalo, se define entonces para todo k = 1, …..n :

- $m_k = \underset{t \in [x_{k-1}, x_k]}{\overset{infimo}{}} f(t)$
- $M_k = \underset{t \in [x_{k-1}, x_k]}{\overset{supremo}{}} f(t)$

Se definen entonces para la función f y partición P:

1. **Suma Superior de Darboux** como $S_f\ (P) = \sum_{k=1}^{k=n} M_k(x_k - x_{k-1})$
2. **Suma Inferior de Darboux** como $I_f\ (P) = \sum_{k=1}^{k=n} M_k(x_k - x_{k-1})$

Cumpliéndose siempre para toda partición P que $I_f\ (P) \leq\ S_f\ (P)$ y que para cada par de particiones P, Q $I_f\ (P) \leq\ S_f\ (Q)$.

ÁREAS COMO SUMAS

Sea $\wp = \{Conjunto\ de\ Particiones\ del\ intervalo\ [a, b]\}$ entonces:

- Considerando $\{I_f(P) tal\ que\ P\ \in\ \wp\}$ se obtienen todas las aproximaciones **por defecto** del área de la región situada por debajo de la gráfica de la función.
- Considerando $\{S_f(P) tal\ que\ P\ \in\ \wp\}$ se obtienen todas las aproximaciones **por exceso** del área de la región situada por debajo de la gráfica de la función.

¿QUÉ ES UNA INTEGRAL?

INTEGRAL SUPEROR E INFERIOR

Sea *f* una función acotada en el intervalo *[a,b]* entonces:

- Se define la integral inferior de la función *f* como el número $\underline{\int_a^b} f = \underset{p\in\wp}{sup} I_f(P)$
- Se define la integral superior de la función *f* como el número $\overline{\int_a^b} f = \underset{p\in\wp}{inf} S_f(P)$

cumpliéndose siempre que $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

FUNCIÓN INTEGRABLE

Una función *f* acotada sobre *[a,b]* es integrable en *[a,b]* si y solo si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, llamándose a ese valor común **integral de *f* sobre *[a,b]***, representándose como:

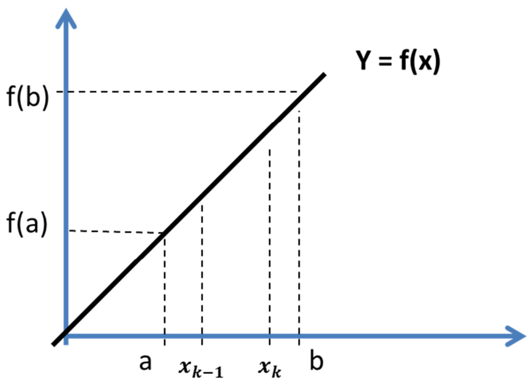
$$\int_a^b f \ o \ \int_a^b f(x)dx$$

EJEMPLO

$$f(x) = x \ en\ el\ intervalo\ [a,b] con\ 0 < a < b$$

¿Existe su integral?

1. Creamos la partición del intervalo *[a,b]* $x_{k-1}, x_k\ con\ x_0 = a\ y\ x_n = b$



2. Calculamos las suma superior de Darboux:
   a. $M_k = \underset{t\in[x_{k-1},x_k]}{sup} f(t) = f(x_k) = x_k$
   b. $\boldsymbol{S_f}\ (\boldsymbol{P}) = \sum_{k=1}^{k=n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_1^n x_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_1^n [x_k^2 - x_k x_{k-1}] = \frac{1}{2}\sum_1^n [(x_k^2 - x_{k-1}^2) + (x_k - x_{k-1})^2] = \frac{1}{2}\sum_1^n (x_k^2 - x_{k-1}^2) + \frac{1}{2}\sum_1^n (x_k - x_{k-1})^2 = \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) + \frac{1}{2}\sum_1^n (x_k - x_{k-1})^2 \geq \boldsymbol{\frac{b^2-a^2}{2}}$
3. Calculamos la suma inferior de Darboux:

a. $m_k = \inf_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t)$

b. Siguiendo metodología a la superior se llega a $\boldsymbol{I_f}\ (\boldsymbol{P}) = \sum_{k=1}^{k=n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \frac{\boldsymbol{b^2 - a^2}}{\boldsymbol{2}} - \frac{1}{2}\sum_1^n (x_k - x_{k-1})^2 \leq \frac{\boldsymbol{b^2 - a^2}}{\boldsymbol{2}}$

4. Por tanto, se tiene que $\inf S_f(P) = \overline{\int_a^b} f = \frac{\boldsymbol{b^2 - a^2}}{\boldsymbol{2}}$

5. Y que $\sup I_f(P) = \underline{\int_a^b} f = \frac{\boldsymbol{b^2 - a^2}}{\boldsymbol{2}}$

6. Comprobándose la integrabilidad de su función y siendo su valor $\int_a^b f = \frac{b^2 - a^2}{12}$

INTEGRABILIDAD

DEFINICIÓN

Sea *f* una función acotada en *[a,b]* , entonces f es integrable sobre [a,b] si y solo si se cumple que

$$\forall\ \mathcal{E} > 0\ \exists\ p\ partición\ del\ intervalo\ para\ la\ que\ se\ cumple\ que\ S_f(P) - I_f(P) < \mathcal{E}$$

Definición a partir de la que puede concluirse que si una función es monótona en *[a,b]* entonces es integrable en dicho intervalo.

INTEGRALES COMO LÍMITE DE SUMAS (SUMAS DE RIEMANN)

SUMA DE RIEMANN

Sea *f* una función acotada sobre *[a,b]* y *P* una partición del intervalo *[a,b]*, se define la suma de Riemann para la función *f* y la partición *P* como:

$$R_f(P, \sigma) = \sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\ \ donde\ \xi_k\ \in [x_k, x_{k-1}] es\ una\ elección\ arbitraria\ llamada\ \sigma$$

Por tanto, dada una función f acotada, para cada partición se pueden obtener muchas sumas de Riemann dependiendo de la elección σ.

Partiendo de la anterior consideración siempre puede afirmarse que:

$$I_f(P) \leq\ R_f(P) \leq\ S_f(P)\ \forall P \in \wp$$

CONVERGENCIA DE LA SUMA DE RIEMANN

Se llama malla de una partición P a la longitud máxima de un subintervalo:

$$\mathcal{M}\ (P) = \max_{1 \leq k \leq n}(x_k - x_{k-1})$$

Así si *f* es una función *acotada* en *[a,b]*, las sumas de Riemann para *f* convergen al número *I* si y solo si

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ tal\ que\ \forall\ P\ partición\ de\ [a,b] cuya\ malla\ \mathcal{M}\ (P) < \delta$$

$$para\ la\ convergencia\ se\ ha\ de\ verificar\ para\ toda\ elección\ \sigma\ de\ \xi_k\ en\ cada\ subintervalo\ de\ P\ que$$

$$\left|R_f(p,\sigma) - I\right| < \varepsilon$$

CONVERGENCIA HACIA LA INTEGRAL

Sea *f* una *función acotada* sobre *[a,b]* entonces:

1. $\lim_{\mathcal{M}(P)\to 0} S_f(P) = \overline{\int_a^b} f$
2. $\lim_{\mathcal{M}(P)\to 0} I_f(P) = \underline{\int_a^b} f$

Si *f* es una función integrable sobre *[a,b]* entonces:

$$\lim_{\mathcal{M}(P)\to 0} R_f(P,\sigma) = \int_a^b f$$

DEFINICIÓN ALTERNATIVA DE INTEGRABILIDAD

Sea *f* una *función acotada* sobre *[a,b]* entonces

$$\boldsymbol{si\ \forall\ P\ parit ición\ de\ [a,b],\ y\ \forall\ \sigma\ elección\ de\ puntos\ intermedios\ se\ cumple\ que}$$

$$\lim_{\mathcal{M}(P)\to 0} R_f(P,\sigma) = I$$

$$\boldsymbol{entonces\ f\ es\ integrable\ sobre\ [a,b]\ y\ \int_a^b f = I}$$